

(۴)

جلسه سوم

موضوع ۳: معادلات

* هر معادله شامل یک یا چند متغیر است که به ازای بعضی عددهایی که به جای متغیرها قرار می دهیم، به یک تساوی تبدیل می شود.

مثال در معادله $2x + 9 = 0$ عدد ۳- تنها ریشه معادله است. یعنی اگر به جای x عدد ۳- را قرار دهیم تساوی برقرار می شود.

معادله درجه اول

* فرم کلی معادله درجه اول یک مجهولی به صورت $ax + b = 0$ است که در آن مجهول معادله a و b دو عدد صحیح هستند.

* نکته: دقت شود منظور از درجه معادله، توان x است. مثلاً در معادله $3x - 4$ چون توان x یک است آن معادله درجه اول و در معادله $2x^2 - 7$ چون توان x دو است به آن معادله درجه دوم می گویند.

* اگر $ax + b = 0$ معادله درجه اول باشد، برای حل این معادله داریم:

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

بنابراین معادله درجه اول فقط یک جواب دارد.

مثال معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x + 5 = 27 \rightarrow 2x = 27 - 5 \rightarrow 2x = 22 \rightarrow x = 11$

ب) $4x - 5 = 2x + 1 \rightarrow 4x - 2x = 1 + 5 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2}$

$\rightarrow x = 3$

5

معادله درجه دوم:

** معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را یک معادله درجه دوم می نامیم ($a \neq 0$) در معادله درجه دوم a و b و c اعداد حقیقی و x متغیر معادله است.

** معمولاً شکل استاندارد معادلات درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد. در مواقعی ممکن است شکل اولیه معادله به صورت استاندارد نباشد. در چنین حالتی می توان با جابجایی عبارات در طرفین معادله، شکل معادله را به صورت استاندارد درآورد.

(الف) $x^2 - 3x + 1 = 0$

(ب) $2(y^2 - 4y) - 5 = 0$

(ج) $z(z-1) - 3 = 0$

مثال معادلات زیر را به صورت استاندارد در آورید:

معادله	شکل استاندارد معادله	مقادیر a و b و c
$x^2 - 3x + 1 = 0$	انتقال تکیه عبارات به سمت چپ $x^2 - 3x + 1 = 0$	$a=1$ و $b=-3$ و $c=1$
$2(y^2 - 4y) - 5 = 0$	ضرب کردن 2 و انتقال 5 به سمت چپ $2y^2 - 4y - 5 = 0$	$a=2$ و $b=-4$ و $c=-5$
$z(z-1) - 3 = 0$	ضرب کردن z و انتقال 3 به سمت چپ $z^2 - z - 3 = 0$	$a=1$ و $b=-1$ و $c=-3$

** حل معادله درجه دوم:

برای حل این معادلات ابتدا باید مقادیر a و b و c را بیابیم و سپس از فرمول زیر مقدار جوابها را

به دست آوریم $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (رابطه 1) Δ (delta) دلتا

$\Delta = b^2 - 4ac$

۶

همان طور که بیان شد، در پاسخ x مقدار دلالت که زیر رادیکال قرار می گیرد، نمی تواند هر عددی باشد چرا که مقدار زیر رادیکال باید بیشتر از صفر باشد ($\Delta > 0$). نهایتاً برای یک معادله درجه دوم حالت های زیر می تواند رخ دهد:

① $\Delta = b^2 - 4ac$ مثبت باشد. در این حالت معادله دو پاسخ متفاوت دارد.

② $\Delta = b^2 - 4ac$ صفر باشد. در این حالت معادله دو پاسخ مشابه یا اصطلاحاً ریشه مضاعف دارد.

③ $\Delta = b^2 - 4ac$ منفی باشد. در این حالت معادله پاسخی ندارد.

مثال پاسخ معادله $5x^2 + 9x + 1 = 0$ را بیابید؟

این جهت حل یک معادله درجه دوم ابتدا باید ضرایب a ، b و c را بیابید. با مقایسه معادله با معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و برابر با اعداد زیر به دست می آید:

$a = 5$, $b = 9$ و $c = 1$

در قدم بعدی باید Δ را به دست آوریم و علامت آن را مشخص کنیم. با توجه به مقایسه a ، b و c :

اندازه Δ برابر است با: $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 5 \times 1 = 14$

عدد دلالت به دست آمده مثبت است. در نتیجه این معادله دو پاسخ متفاوت خواهد داشت.

با استفاده از رابطه ۱، پاسخ معادله برابر است با:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{14}}{2 \times 5} \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{14}}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9 + \sqrt{14}}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{-9 - \sqrt{14}}{10} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

همان طور که بیان شده بود، معادله دارای دو پاسخ -1 و $-\frac{1}{5}$ می باشد.

(7)

مسئله پاسف معادله $5x^2 + 2x + 1 = 0$ را بسازید.

$a = 5, b = 2, c = 1$

در رابطه فوق مقادیر c, b و a برابرند با :

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = -16$

در نتیجه دلالت بر این است که

معادله دلالت بر این است که معادله فوق پاسف ندارد

مسئله معادله $x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$ را حل کنید.

$a = 3, b = 4, c = 2$

در معادله مقادیر c, b و a برابرند با :

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 2 = 0$

در نتیجه دلالت بر این است که

با استفاده از رابطه 1، پاسف معادله برابر است با :

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 0}{2 \times 3} \Rightarrow x = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

بهترین معادلات زیر را حل کنید.

1) $x^2 - 2x + 5 = 0$

2) $2x^2 - 12x - 14 = 0$

3) $4x^2 + 9 = 0$

4) $3x^2 = 27$

5) $2x^2 - 5x = 0$

6) $x^2 - 7x + 12 = 0$

7) $x - 4 = 2x + 2$

8) $x + 7 = 5x + 27$